ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2011. október 18.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

2011. október 18. 8:00

Az írásbeli vizsga időtartama: 240 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

NEMZETI ERŐFORRÁS MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.

2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.

3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!**
Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a 9. feladatra nem kap pontot.

4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!

5. **A feladatok megoldásához alkalmazott gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**

6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**

7. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasság-tétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.

8. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!

9. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.

10. Minden feladatnál csak egyféle megoldás értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!

11. Kérjük, hogy a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!

I.

1. Kinga 10. születésnapja óta kap havi zsebpénzt a szüleitől. Az első összeget a 10. születésnapján adták a szülők, és minden hónapban 50 Ft-tal többet adnak, mint az azt megelőző hónapban. Egy bizonyos hónapban, mikor éppen 1850 Ft volt a havi zsebpénze, összeadta az addig kapott összes zsebpénzét. Az összeg 35100 Ft lett. Mennyi volt Kinga induló zsebpénze, és hány hónap telt el a 10. születésnapja óta?

Ö.:	12 pont	

2. Az ENSZ 1996-ban megjelent táblázatának egy részlete a nyolc legnagyobb népességszámú ország népességi adatait tartalmazza 1988-ban, és egy népesedésdinamikai modell előrejelzése alapján 2050-ben.

	1988		2050 (előrejelzés)	
Sorrend	**Ország**	**Népességszám (millió fő)**	**Ország**	**Népességszám (millió fő)**
1	Kína	1255	India	1533
2	India	976	Kína	1517
3	Egyesült Államok	274	Pakisztán	357
4	Indonézia	207	Egyesült Államok	348
5	Brazília	165	Nigéria	339
6	Oroszország	148	Indonézia	318
7	Pakisztán	147	Brazília	243
8	Japán	126	Banglades	218

(World Population Prospects: The 1996 Revision)

Feltételezzük, hogy Pakisztán lakossága 1988 és 2050 között minden évben ugyanannyi százalékkal nő, mint amennyi százalékkal az előző évben növekedett.

a) Ezzel a feltételezéssel élve – millió főre kerekítve – hány lakosa lesz Pakisztánnak 2020-ban? (Az évi százalékos növekedés két tizedesjegyre kerekített értékével számoljon!)

b) A táblázat mindkét oszlopában szereplő országok népességi adataira vonatkozóan mennyivel változik az átlagos lakosságszám és a medián 1988 és 2050 között? (Válaszát millió főben, két tizedesjegyre kerekítve adja meg.)

a)	7 pont	
b)	5 pont	
Ö.:	12 pont	

3. Egy 32 fős érettségiző osztály tanulói három különböző táncot mutatnak be a szalagavató bálon. Az alábbi táblázat az egyes táncokban fellépő diákok számát mutatja nemenkénti bontásban.

	Keringő	Kán-kán	Hip-hop	Egyik sem
Lány	9	6	10	2
Fiú	9	0	4	2

Van 2 olyan lány, aki mindhárom táncban fellép, ugyanakkor nincs olyan fiú az osztályban, aki egynél több produkcióban részt venne.

a) A lányok közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva, mennyi annak a valószínűsége, hogy mindketten táncolnak a kán-kánban?

b) Az osztály tanulói közül egyet véletlenszerűen kiválasztva, mennyi a valószínűsége annak, hogy az illető pontosan két táncban szerepel?

a)	5 pont	
b)	9 pont	
Ö.:	14 pont	

4. Oldja meg a következő egyenletrendszert, ha x és y valós számok, továbbá $x > 0$, $x \neq 1$ és $y > 0$, $y \neq 1$.

$$\log_x y + \log_y x = 2$$
$$\sin(2x + 3y) + \sin(4x + y) = 1$$

Ö.:	13 pont	

II.

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

5. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik illeszkedik a $P(2;\ 5)$ pontra, valamint az $x+y=4$ és az $x+y=6$ egyenletű egyeneseket olyan pontokban metszi, amelyek első koordinátájának különbsége 3.

Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

6. **a)** Két szabályos dobókockát egyszerre feldobunk. Számítsa ki a következő két esemény valószínűségét:
A: a dobott pontok összege prím;
B: a dobott pontok összege osztható 3-mal.

b) Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből véletlenszerűen kiválasztunk három különbözőt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával 4-gyel osztható háromjegyű számot tudunk képezni?

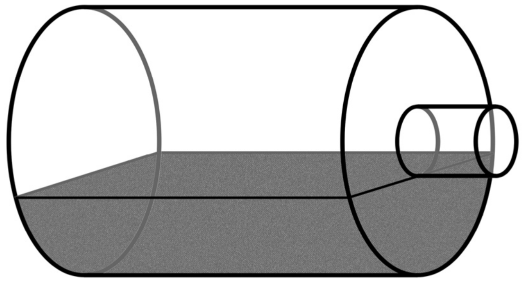
c) Az $ABCD$ négyzet csúcsai: $A(0;0)$, $B\left(\frac{\pi}{2};0\right)$, $C\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, $D\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Véletlenszerűen kiválasztjuk a négyzet egy belső pontját.
Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott pont a koordinátatengelyek és az $f:\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\cos x$ függvény grafikonja által határolt tartomány egyik pontja?

a)	6 pont	
b)	5 pont	
c)	5 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

7. Egy pillepalack alakja olyan forgáshenger, amelynek alapköre 8 cm átmérőjű. A palack fedőkörén található a folyadék kiöntésére szolgáló szintén forgáshenger alakú nyílás. A két hengernek közös a tengelye. A kiöntő nyílás alapkörének átmérője 2 cm. A palack magassága a kiöntő nyílás nélkül 30 cm.

A palack vízszintesen fekszik úgy, hogy annyi folyadék van benne, amennyi még éppen nem folyik ki a nyitott kiöntő nyíláson keresztül.



a) Hány deciliter folyadék van a palackban? (Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!)

A palack tartalmát kiöntve, a palackot összenyomva, annak eredeti térfogata $2p$ százalékkal csökken. Egy hulladékot újrahasznosító cég (speciális gép segítségével) az ilyen módon tömörített palack térfogatát annak további p százalékával tudja csökkenteni. Az összenyomással, majd az ezt követő gépi tömörítéssel azt érik el, hogy a palackot eredeti térfogatának 19,5 százalékára nyomják össze.

b) Határozza meg p értékét!

a)	9 pont	
b)	7 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

8. **a)** Ábrázolja a derékszögű koordináta-rendszerben az

$$f:[0;5]\to \mathbf{R},\ f(x)=\left|x^2-4x+3\right| \text{ függvényt!}$$

b) Tekintsük az $|(x-2)^2-1|=k$ paraméteres egyenletet, ahol k valós paraméter. Vizsgálja a megoldások számát a k paraméter függvényében!

c) Ábrázolja a megoldások számát megadó függvényt a $k\in\,]-6;6[$ intervallumon!

d) Adja meg a c)-beli függvény értékkészletét!

a)	5 pont	
b)	7 pont	
c)	2 pont	
d)	2 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

9. Öt, egymástól távol eső tanya között kábeleket feszítenek ki, bármely két tanya között legfeljebb egyet.

a) Elvileg összesen hány különböző hálózatot lehetséges létrehozni a tanyák között? (A hálózatban a kifeszített kábelek száma 0-tól 10-ig bármennyi lehet. Két hálózatot akkor tekintünk különbözőnek, ha van olyan összeköttetés, amely az egyikben létezik, de a másikban nem.)

b) Takarékossági okokból csak 4 kábelt feszítenek ki úgy, hogy a hálózat azért összefüggő legyen. (Összefüggőnek tekintünk egy hálózatot, ha a kábelek mentén bármely tanyáról bármely másikba el lehet jutni, esetleg más tanyák közbeiktatásával.) Hány különböző módon tehetik ezt meg, ha az egyes tanyákat megkülönböztetjük egymástól?

a)	4 pont	
b)	12 pont	
Ö.:	16 pont	

<table>
<tr><td></td><td>a feladat sorszáma</td><td>maximális pontszám</td><td>elért pontszám</td><td>maximális pontszám</td><td>elért pontszám</td></tr>
<tr><td rowspan="4">I. rész</td><td>1.</td><td>12</td><td></td><td rowspan="4">51</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>2.</td><td>12</td><td></td></tr>
<tr><td>3.</td><td>14</td><td></td></tr>
<tr><td>4.</td><td>13</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">II. rész</td><td></td><td>16</td><td></td><td rowspan="4">64</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td></td><td>16</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>16</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>16</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">← nem választott feladat</td></tr>
<tr><td colspan="4">Az írásbeli vizsgarész pontszáma</td><td>115</td><td></td></tr>
</table>

dátum

javító tanár

---

	elért pontszám **egész számra** kerekítve	programba beírt **egész** pontszám
I. rész		
II. rész		

javító tanár

jegyző

dátum

dátum